

此时原不等式解集为  $\left(1, \frac{1}{2a-1}\right)$ .

综上, 当  $a < \frac{1}{2}$  时, 原不等式解集为  $\left(-\infty, \frac{1}{2a-1}\right) \cup (1, +\infty)$ ;

当  $a = \frac{1}{2}$  时, 原不等式解集为  $(1, +\infty)$ ;

当  $\frac{1}{2} < a < 1$  时, 原不等式解集为  $\left(1, \frac{1}{2a-1}\right)$ .

## 专练 1 新定义、新情境专练

**1. C** 【解析】对于①, 设集合  $A = \{0\}$ , 显然  $0+0=0$ , 符合性质一, 同时也符合性质二, 因此集合  $A = \{0\}$  是一个“群”, 但它是有限集, 故①不正确.

对于②, 根据“群”的性质, 由  $b \in A$  可得  $-b \in A$ , 因此可得  $a-b \in A$ , 故②正确.

对于③, 根据性质一和性质二, 可知  $A \cap B$  中必定有一个元素为 0, 设  $A \cap B = C$ , 则  $C$  一定不为空集. 若  $c \in C$ , 则一定有  $c \in A, c \in B$ , 因为  $A, B$  都是“群”, 所以  $-c \in A, -c \in B$ , 因此  $-c \in C$ , 此时  $c - c = 0 \in C$ . 若  $d \in C$ , 则一定有  $d \in A, d \in B$ , 则  $c+d \in A, c+d \in B$ , 所以  $c+d \in C$ , 所以集合  $C$  为一个“群”, 故③正确.

故选 C.

**2. D** 【解析】由题意知,  $A \odot B = \{m | m = x - y, x \in A, y \in B\}$ , 又非空集合  $A$  和  $B, A \cup B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 若  $A \odot B \subseteq B$ , 则当  $B$  中有一个元素时,  $B = \{1\}, A = \{2\}; B = \{2\}, A = \{4\}$ . 当  $B$  中有两个元素时,  $B = \{1, 2\}, A = \{3\}; B = \{1, 3\}, A = \{4\}; B = \{1, 4\}, A = \{5\}; B = \{2, 3\}, A = \{5\}$ . 当  $B$  中有三个元素时,  $B = \{1, 2, 3\}, A = \{4\}$ . 当  $B$  中有四个元素时,  $B = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{5\}$ . 当  $B$  中有五个元素时, 集合  $A$  不存在.

所以满足条件的不同的  $B$  的个数为 8, 故选 D.

**3. 47** 【解析】当  $n=5$  时,  $S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 含有一个元素的奇子集为  $\{1\}, \{3\}, \{5\}$ , 含有两个元素的奇子集为  $\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}$ , 含有三个元素的奇子集为  $\{1, 3, 5\}$ , 故所有奇子集的容量之和为  $1+3+5+1 \times 3+1 \times 5+3 \times 5+1 \times 3 \times 5=47$ .

**4. 【解】**(1)  $y = -2x + 3$ , 令  $x=0$ , 解得  $y=3$ , 令  $x=1$ , 解得  $y=1$ , 故  $P \cap S = \{(0, 3), (1, 1)\}$ .  
 $y = -x^2 + 3$ , 令  $x=0$ , 解得  $y=3$ , 令  $x=1$ , 解得  $y=2$ , 故  $Q \cap S = \{(0, 3), (1, 2)\}$ .  
(2)  $(P \cap S) \cup (Q \cap S) = \{(0, 3), (1, 1), (1, 2)\}$ .

**5. B** 【解析】因为  $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x} = \frac{4}{2x} + \frac{9}{1-2x}$ , 又  $0 < x < \frac{1}{2}$ , 所以由权方和不等式可得  $\frac{4}{2x} + \frac{9}{1-2x} \geq \frac{(2+3)^2}{2x+1-2x} = 25$ , 当且仅当  $\frac{2}{2x} = \frac{3}{1-2x}$ , 即  $x = \frac{1}{5}$  时等号成立. 故选 B.

**6. BCD** 【解析】对于 A,  $\because a > b > 0, m > 0$ ,

$$\therefore \frac{b+m}{a+m} - \frac{b}{a} = \frac{m(a-b)}{a(a+m)} > 0, \therefore \frac{b+m}{a+m} > \frac{b}{a}, \text{故 A 错误.}$$

对于 B,  $\because b > a > 0, m > 0$ ,

$$\therefore \frac{b+m}{a+m} - \frac{b}{a} = \frac{m(a-b)}{a(a+m)} < 0, \therefore \frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m}, \text{故 B 正确.}$$

对于 C,  $\because a > b > 0, c > d > 0$ ,

$$\therefore a-b > 0, c-d > 0,$$

$$\therefore \frac{b+c}{a+c} - \frac{b+d}{a+d} = \frac{(b+c)(a+d) - (b+d)(a+c)}{(a+c)(a+d)} = \frac{(a-b)(c-d)}{(a+c)(a+d)} > 0,$$

$$\therefore \frac{b+d}{a+d} < \frac{b+c}{a+c}, \text{故 C 正确.}$$

对于 D,  $\because 0 < 1+a < 1+a+b, 0 < 1+b < 1+a+b$ ,

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{a}{1+a+b}, \frac{b}{1+b} > \frac{b}{1+a+b},$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b}, \text{故 D 正确.}$$

故选 BCD.

**7. 6**  $\sqrt{10}$  【解析】不妨令  $b=6$ , 则  $a+c=14$ ,

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[ a^2 c^2 - \left( \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]} \\ = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 c^2 - [(c+a)^2 - 2ac - b^2]^2},$$

$$\text{代入数据得 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \sqrt{[(2ac)^2 - (160 - 2ac)^2]} = \frac{1}{4} \sqrt{160(4ac - 160)},$$

由基本不等式得,  $14 = a+c \geq 2\sqrt{ac}$ , 所以  $4ac \leq 196$ , 可得  $S_{\triangle ABC} \leq 6\sqrt{10}$ , 当且仅当  $a=c=7$  时取等号,

所以该三角形面积  $S$  的最大值为  $6\sqrt{10} \text{ cm}^2$ .

**8. D** 【解析】A: 当  $f(x) = -1$  时,  $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时,  $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = -1 < 0$ , 因此  $f(x) = -1$  不是“理想函数”, 故 A 错误.

B: 当  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  时,  $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时,

$$\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0, \text{所以 } f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ 不是}$$

“理想函数”,故 B 错误.

$$C: \text{当 } f(x) = x-1 \text{ 时, 令 } x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}, \text{ 则 } \frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = 0, \text{ 所以 } f(x) = x-1 \text{ 不是“理想函数”, 故 C 错误.}$$

$$D: \text{当 } f(x) = x - \frac{1}{x} \text{ 时, } \forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), \text{ 当 } x_1 \neq x_2 \text{ 时, } \frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 > 0, \text{ 所以 } f(x) = x - \frac{1}{x} \text{ 为“理想函数”, 故 D 正确. 故选 D.}$$

9. BCD 【解析】对于 A, 根据定义可知,  $[0] = 0$ , A 错误.

对于 B, 当  $x$  为整数时,  $[x] = x, x - [x] = 0$ ; 当  $x$  不是整数时,  $x - [x] \in (0, 1)$ , 故函数  $y = x - [x]$  的值域为  $[0, 1)$ , B 正确.

对于 C, 根据 B 选项可知  $y = x - [x] < 1$ , 故  $\forall x \in \mathbf{R}, x < [x] + 1$ , C 正确.

对于 D,  $x^2 - 2x - 1 \leq x^2 - 2[x] - 1 = 0$ , 解得  $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$ ,

当  $1 - \sqrt{2} \leq x < 0$  时,  $[x] = -1$ , 此时原方程为  $x^2 + 1 = 0$ , 无解;

当  $0 \leq x < 1$  时,  $[x] = 0$ , 此时原方程为  $x^2 - 1 = 0$ , 无解;

当  $1 \leq x < 2$  时,  $[x] = 1$ , 此时原方程为  $x^2 - 3 = 0$ , 解得  $x = \sqrt{3}$ ;

当  $2 \leq x < 1 + \sqrt{2}$  时,  $[x] = 2$ , 此时原方程为  $x^2 - 5 = 0$ , 解得  $x = \sqrt{5}$ , 故 D 正确.

故选 BCD.

10.  $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$  【解析】由题意知,  $1 \triangle k = \sqrt{k} + 1 + k = 3$ , 整理

得  $k + \sqrt{k} - 2 = 0$ , 即  $(\sqrt{k} + 2)(\sqrt{k} - 1) = 0$ , 解得  $k = 1$ ,

$$\text{则 } y = \sqrt{x} + 1 + x - \frac{3x}{2} = -\frac{1}{2}x + \sqrt{x} + 1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2},$$

所以函数  $y = (k \triangle x) - \frac{3x}{2}$  的值域为  $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ .

11. 【解】(1)  $f(x)$  的“不动点”和“稳定点”的集合分别为  $A = \{x | f(x) = x\}$ ,  $B = \{x | f(f(x)) = x\}$ ,

令  $f(x) = x$ , 可得  $2x - 1 = x$ , 解得  $x = 1$ ;

令  $f(f(x)) = x$ , 可得  $2(2x - 1) - 1 = x$ , 解得  $x = 1$ ,

所以集合  $A = \{1\}$ ,  $B = \{1\}$ .

(2) 函数  $f(x) = x^2 + ax + b$ ,

因为  $A = \{-1, 3\}$ , 所以  $\begin{cases} f(-1) = -1, \\ f(3) = 3, \end{cases}$  即  $\begin{cases} (-1)^2 - a + b = -1, \\ 3^2 + 3a + b = 3, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} a = -1, \\ b = -3, \end{cases}$  所以  $f(x) = x^2 - x - 3$ ,

可得  $f(f(x)) = f(x^2 - x - 3) = (x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - 3 = x$ ,

整理得  $(x^2 - x - 3)^2 - x^2 = 0$ , 即  $(x^2 - 3)(x^2 - 2x - 3) = 0$ ,

所以  $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 1)(x - 3) = 0$ ,

解得  $x = \pm\sqrt{3}$  或  $x = -1$  或  $x = 3$ ,

所以集合  $B = \{-\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}, 3\}$ .

12. 【解】(1) 函数  $f(x) = x^2$  在  $\mathbf{R}$  上的值域为  $[0, +\infty)$ , 令

$f(x) = x^2$  在  $[a, b]$  上的值域为  $[a, b]$ ,

则  $a \geq 0$ , 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增, 因此  $\begin{cases} a^2 = a, \\ b^2 = b, \end{cases}$  而  $a <$

$b$ , 解得  $\begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \end{cases}$

所以函数  $f(x) = x^2$  的所有“保值”区间为  $[0, 1]$ .

(2) 函数  $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$  在  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$  上单调递增,

若  $[p, q]$  是  $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$  的“保值”区间, 则  $\begin{cases} g(p) = p, \\ g(q) = q, \end{cases}$

因此  $p, q$  是方程  $1 - \frac{1}{x} = x$  的两个同号不等实根.

由  $1 - \frac{1}{x} = x$ , 得  $x^2 - x + 1 = 0$ , 则  $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$ , 则方程

$x^2 - x + 1 = 0$  无实根,

所以函数  $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$  不存在“保值”区间.

(3) 函数  $h(x) = \frac{(a^2 + a)x - 1}{a^2 x} = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2 x}$  在  $(-\infty, 0)$ ,  $(0,$

$+\infty)$  上单调递增,

依题意,  $\begin{cases} h(m) = m, \\ h(n) = n, \end{cases}$  则  $m, n$  是方程  $1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2 x} = x$  的两个同

号不等实根,

即  $m, n$  是关于  $x$  的方程  $x^2 - \left(1 + \frac{1}{a}\right)x + \frac{1}{a^2} = 0$  的两个同号不

等实根,

由  $\Delta' = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{4}{a^2} > 0$ , 解得  $a < -3$  或  $a > 1$ , 于是  $m + n = 1 +$

$\frac{1}{a} > 0, mn = \frac{1}{a^2} > 0$ ,

则  $n - m = \sqrt{(n+m)^2 - 4mn} = \sqrt{-\frac{3}{a^2} + \frac{2}{a} + 1} =$

$\sqrt{-3\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$

当且仅当  $a = 3$  时取等号,

所以当  $n - m$  取得最大值时,  $a$  的值为 3.